数　学　Ⅱ

（全　問　必　答）

第１問　（配点　30）

〔１〕　連立方程式

$$(*)\begin{cases} xy = 128 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ① \\ \dfrac{1}{\log_2 x} + \dfrac{1}{\log_2 y} = \dfrac{7}{12} & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ② \end{cases}$$

を満たす正の実数x，yを求めよう。ただし，$x \neq 1$，$y \neq 1$とする。①の両辺で２を底とする対数をとると

$$\log_2 x + \log_2 y = \boxed{\text{ア}}$$

が成り立つ。これと②より

$$(\log_2 x)(\log_2 y) = \boxed{\text{イウ}}$$

である。

（数学Ⅱ第１問は次ページに続く。）

したがって，$\log_2 x$，$\log_2 y$ は 2 次方程式

$$t^2 - \boxed{\text{エ}}\,t + \boxed{\text{オカ}} = 0 \qquad \cdots\cdots ③$$

の解である。③の解は $t = \boxed{\text{キ}}$，$\boxed{\text{ク}}$ である。ただし，$\boxed{\text{キ}}$ と $\boxed{\text{ク}}$ は解答の順序を問わない。よって，連立方程式(＊)の解は $(x,\ y) = \left(\boxed{\text{ケ}},\ \boxed{\text{コサ}}\right)$ または $(x,\ y) = \left(\boxed{\text{コサ}},\ \boxed{\text{ケ}}\right)$ である。

（数学Ⅱ第 1 問は次ページに続く。）

〔2〕 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ の範囲で

$$\sin 4\theta=\cos\theta \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

を満たす θ と $\sin\theta$ の値を求めよう。

一般に，すべての x について

$$\cos x=\sin\left(\boxed{\text{シ}}-x\right)$$

である。$\boxed{\text{シ}}$ に当てはまるものを，次の⓪〜②のうちから一つ選べ。

⓪ π　　① $\frac{\pi}{2}$　　② $-\frac{\pi}{2}$

したがって，①が成り立つとき，$\sin 4\theta=\sin\left(\boxed{\text{シ}}-\theta\right)$となり，$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ の範囲で 4θ，$\boxed{\text{シ}}-\theta$ のとり得る値の範囲を考えれば，$4\theta=\boxed{\text{シ}}-\theta$ または $4\theta=\pi-\left(\boxed{\text{シ}}-\theta\right)$となる。よって，①を満たす θ は $\theta=\dfrac{\pi}{\boxed{\text{ス}}}$ または $\theta=\dfrac{\pi}{\boxed{\text{セソ}}}$ である。

（数学Ⅱ第１問は次ページに続く。）

$\sin\dfrac{\pi}{\boxed{ス}} = \dfrac{\boxed{タ}}{\boxed{チ}}$ である。$\sin\dfrac{\pi}{\boxed{セソ}}$ の値を求めよう。① より

$$\boxed{ツ}\sin 2\theta\cos 2\theta = \cos\theta$$

となり，この式の左辺を 2 倍角の公式を用いて変形すれば

$$\left(\boxed{テ}\sin\theta - \boxed{ト}\sin^3\theta\right)\cos\theta = \cos\theta$$

となる。ここで $\cos\theta > 0$ であるから

$$\boxed{ト}\sin^3\theta - \boxed{テ}\sin\theta + 1 = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

が成り立つ。$\sin\theta = \dfrac{\boxed{タ}}{\boxed{チ}}$ は ② を満たしている。$\theta = \dfrac{\pi}{\boxed{セソ}}$ とすると，$\sin\theta \neq \dfrac{\boxed{タ}}{\boxed{チ}}$ であるから

$$\boxed{ナ}\sin^2\theta + \boxed{ニ}\sin\theta - 1 = 0$$

となる。ここで，$\sin\dfrac{\pi}{\boxed{セソ}} > 0$ より

$$\sin\frac{\pi}{\boxed{セソ}} = \frac{\boxed{ヌネ} + \sqrt{\boxed{ノ}}}{\boxed{ハ}}$$

である。

第2問 （配点　30）

k を実数とし，座標平面上に点 P$(1,\ 0)$ をとる。曲線

$$y = -x^3 + 9x^2 + kx$$

を C とする。

(1)　点 Q$(t,\ -t^3 + 9t^2 + kt)$ における曲線 C の接線が点 P を通るとすると

$$-\boxed{\text{ア}}\,t^3 + \boxed{\text{イウ}}\,t^2 - \boxed{\text{エオ}}\,t = k$$

が成り立つ。

$$p(t) = -\boxed{\text{ア}}\,t^3 + \boxed{\text{イウ}}\,t^2 - \boxed{\text{エオ}}\,t$$

とおくと，関数 $p(t)$ は $t = \boxed{\text{カ}}$ で極小値 $\boxed{\text{キク}}$ をとり，$t = \boxed{\text{ケ}}$ で極大値 $\boxed{\text{コ}}$ をとる。

したがって，点 P を通る曲線 C の接線の本数がちょうど 2 本となるのは，k の値が $\boxed{\text{サ}}$ または $\boxed{\text{シス}}$ のときである。また，点 P を通る曲線 C の接線の本数は $k = 5$ のとき $\boxed{\text{セ}}$ 本，$k = -2$ のとき $\boxed{\text{ソ}}$ 本，$k = -12$ のとき $\boxed{\text{タ}}$ 本となる。

（数学Ⅱ第2問は次ページに続く。）

(2) $k = 0$ とする。曲線

$$y = -x^3 + 6x^2 + 7x$$

を D とする。曲線 C と D の交点の x 座標は $\boxed{\text{チ}}$ と $\dfrac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}}$ である。

$-1 \leqq x \leqq 2$ の範囲において，2曲線 C，D および2直線 $x = -1$，$x = 2$ で囲まれた二つの図形の面積の和は $\dfrac{\boxed{\text{トナ}}}{\boxed{\text{ニ}}}$ である。

第3問 (配点 20)

座標平面上の直線 $y = -x$ を ℓ で表す。2点 A(2, 0), B(2, 2)と直線 ℓ 上の点 P(s, $-s$)を考える。ただし，$s \neq 2$ とする。

3点A，B，Pを通る円 C の中心Qは直線 $y = \boxed{\text{ア}}$ 上にある。点Qの x 座標を t とおき，AQ^2，PQ^2 を s，t を用いて表すと

$$\mathrm{AQ}^2 = t^2 - \boxed{\text{イ}}\,t + \boxed{\text{ウ}}$$

$$\mathrm{PQ}^2 = t^2 - \boxed{\text{エ}}\,st + \boxed{\text{オ}}\,s^2 + \boxed{\text{カ}}\,s + \boxed{\text{キ}}$$

である。

一方，$s \neq t$ のとき，直線PQの傾きは

$$\frac{\boxed{\text{ク}} + s}{t - s}$$

である。

(数学Ⅱ第3問は次ページに続く。)

円 C が直線 ℓ と接するときの s の値と円 C の方程式を求めよう。円 C と直線 ℓ が接するとき，直線 PQ と直線 ℓ は垂直であるから

$$\frac{\boxed{\text{ク}}+s}{t-s}=\boxed{\text{ケ}}$$

となり

$$t=\boxed{\text{コ}}\,s+\boxed{\text{サ}}$$

と表せる。さらに，$\mathrm{AQ}^2=\mathrm{PQ}^2$ であることより

$$s=\boxed{\text{シ}},\ \boxed{\text{ス}}$$

となる。ただし，$\boxed{\text{シ}}<\boxed{\text{ス}}$ とする。$s=\boxed{\text{シ}}$ のとき，円 C の方程式は

$$\left(x-\boxed{\text{セ}}\right)^2+\left(y-\boxed{\text{ソ}}\right)^2=\boxed{\text{タ}}$$

であり，また $s=\boxed{\text{ス}}$ のとき，円 C の方程式は

$$\left(x-\boxed{\text{チ}}\right)^2+\left(y-\boxed{\text{ツ}}\right)^2=\boxed{\text{テト}}$$

である。

第4問 (配点 20)

a, b を実数とし，x の 3 次式

$$P(x) = x^3 - ax^2 - bx - 1 + a + b$$

$$Q(x) = x^3 - 2bx^2 - 4(1 - a - b)x - 8a$$

を考える。

(1) $P(x)$ と $Q(x)$ を a, b について整理すると

$$P(x) = -\left(x^2 - \boxed{\text{ア}}\right)a - \left(x - \boxed{\text{イ}}\right)b + x^3 - 1$$

$$Q(x) = 4\left(x - \boxed{\text{ウ}}\right)a - 2\left(x^2 - \boxed{\text{エ}}\,x\right)b + x^3 - 4x$$

であるので

$$P(x) = \left(x - \boxed{\text{オ}}\right)\left\{x^2 + \left(1 - \boxed{\text{カ}}\right)x + 1 - a - b\right\}$$

$$Q(x) = \left(x - \boxed{\text{キ}}\right)\left\{x^2 + 2\left(1 - \boxed{\text{ク}}\right)x + \boxed{\text{ケコ}}\right\}$$

と因数分解される。

(数学Ⅱ第4問は次ページに続く。)

(2) 虚数 α が $P(\alpha)=0$ と $Q(\alpha)=0$ を満たすとき

$$\alpha^2+\left(1-\boxed{\text{カ}}\right)\alpha+1-a-b=0$$

$$\alpha^2+2\left(1-\boxed{\text{ク}}\right)\alpha+\boxed{\text{ケコ}}=0$$

であるので，α は

$$\left(\boxed{\text{サシ}}-a+2b\right)\alpha+1-\boxed{\text{スセ}}-b=0$$

を満たす。ここで，a，b が実数であり，かつ α が虚数であることから

$$a=\frac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タチ}}},\quad b=\frac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{タチ}}}$$

である。

このとき，方程式 $P(x)=0$ の二つの虚数解の逆数は 2 次方程式

$$x^2+\frac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}}x+\frac{\boxed{\text{ナニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}}=0$$

の解である。