数学Ⅱ・数学B

問　題	選　択　方　法
第1問	必　　　答
第2問	必　　　答
第3問	いずれか2問を選択し，解答しなさい。
第4問	
第5問	
第6問	

第1問 (必答問題)(配点 30)

〔1〕 $-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq 0$ のとき，関数

$$y = \cos 2\theta + \sqrt{3}\sin 2\theta - 2\sqrt{3}\cos\theta - 2\sin\theta$$

の最小値を求めよう。

$t = \sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta$ とおくと

$$t^2 = \boxed{\text{ア}}\cos^2\theta + \boxed{\text{イ}}\sqrt{\boxed{\text{ウ}}}\sin\theta\cos\theta + \boxed{\text{エ}}$$

であるから

$$y = t^2 - \boxed{\text{オ}}\,t - \boxed{\text{カ}}$$

となる。また

$$t = \boxed{\text{キ}}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{\boxed{\text{ク}}}\right)$$

である。

(数学Ⅱ・数学B第1問は次ページに続く。)

$\theta + \dfrac{\pi}{\boxed{\text{ク}}}$ のとり得る値の範囲は

$$-\frac{\pi}{\boxed{\text{ケ}}} \leqq \theta + \frac{\pi}{\boxed{\text{ク}}} \leqq \frac{\pi}{\boxed{\text{ク}}}$$

であるから，t のとり得る値の範囲は

$$\boxed{\text{コサ}} \leqq t \leqq \sqrt{\boxed{\text{シ}}}$$

である。したがって，y は $t = \boxed{\text{ス}}$，すなわち $\theta = -\dfrac{\pi}{\boxed{\text{セ}}}$ のとき，

最小値 $\boxed{\text{ソタ}}$ をとる。

(数学Ⅱ・数学B第1問は次ページに続く。)

〔2〕 自然数xで，条件

$$12(\log_2\sqrt{x})^2 - 7\log_4 x - 10 > 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{①}$$

$$x + \log_3 x < 14 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{②}$$

を満たすものを求めよう。

まず，xを正の実数として，条件①を考える。①は$X = \log_2 x$とおくと

$$6X^2 - \boxed{\text{チ}}X - \boxed{\text{ツテ}} > 0$$

となる。この2次不等式を解くと

$$X < -\frac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}},\quad \frac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}} < X$$

となる。したがって，条件①を満たす最小の自然数xは$\boxed{\text{ネ}}$であり，

$\boxed{\text{ネ}}$以上のすべての自然数xは①を満たす。

（数学Ⅱ・数学B第１問は次ページに続く。）

次に，条件 ② について考えると，② を満たす最大の自然数 x は $\boxed{\text{ノハ}}$ であり，$\boxed{\text{ノハ}}$ 以下のすべての自然数 x は ② を満たす。

したがって，求める x は $\boxed{\text{ネ}}$ 以上 $\boxed{\text{ノハ}}$ 以下の自然数である。

第2問 (必答問題)(配点 30)

座標平面上で，放物線 $y = x^2$ を C とする。

曲線 C 上の点Pの x 座標を a とする。点Pにおける C の接線 ℓ の方程式は

$$y = \boxed{\text{アイ}}\,x - a^{\boxed{\text{ウ}}}$$

である。$a \neq 0$ のとき直線 ℓ が x 軸と交わる点をQとすると，Qの座標は

$$\left(\frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}},\ \boxed{\text{カ}}\right)$$

である。

$a > 0$ のとき，曲線 C と直線 ℓ および x 軸で囲まれた図形の面積を S とすると

$$S = \frac{a^{\boxed{\text{キ}}}}{\boxed{\text{クケ}}}$$

である。

$a < 2$ のとき，曲線 C と直線 ℓ および直線 $x = 2$ で囲まれた図形の面積を T とすると

$$T = -\frac{a^3}{\boxed{\text{コ}}} + \boxed{\text{サ}}\,a^2 - \boxed{\text{シ}}\,a + \frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}$$

である。

(数学Ⅱ・数学B第2問は次ページに続く。)

$a=0$ のときは $S=0$，$a=2$ のときは $T=0$ であるとして，$0 \leqq a \leqq 2$ に対して $U=S+T$ とおく。a がこの範囲を動くとき，U は $a=\boxed{\text{ソ}}$ で最大値 $\dfrac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}}$ をとり，$a=\dfrac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}}$ で最小値 $\dfrac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナニ}}}$ をとる。

第3問 （選択問題）（配点 20）

数直線上で点Pに実数 a が対応しているとき，a を点Pの座標といい，座標が a である点Pを $\mathrm{P}(a)$ で表す。

数直線上に点 $\mathrm{P}_1(1)$，$\mathrm{P}_2(2)$ をとる。線分 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$ を $3:1$ に内分する点を P_3 とする。一般に，自然数 n に対して，線分 $\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$ を $3:1$ に内分する点を P_{n+2} とする。点 P_n の座標を x_n とする。

$x_1=1$，$x_2=2$ であり，$x_3=\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ である。数列 $\{x_n\}$ の一般項を求めるために，この数列の階差数列を考えよう。自然数 n に対して $y_n=x_{n+1}-x_n$ とする。

$$y_1=\boxed{\text{ウ}},\qquad y_{n+1}=\frac{\boxed{\text{エオ}}}{\boxed{\text{カ}}}y_n\qquad (n=1,2,3,\cdots)$$

である。したがって，$y_n=\left(\dfrac{\boxed{\text{エオ}}}{\boxed{\text{カ}}}\right)^{\boxed{\text{キ}}}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ であり

$$x_n=\frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}-\frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{ケ}}}\left(\frac{\boxed{\text{エオ}}}{\boxed{\text{カ}}}\right)^{\boxed{\text{サ}}}\qquad (n=1,2,3,\cdots)$$

となる。ただし，$\boxed{\text{キ}}$，$\boxed{\text{サ}}$ については，当てはまるものを，次の⓪～③のうちから一つずつ選べ。同じものを繰り返し選んでもよい。

⓪ $n-1$　　① n　　② $n+1$　　③ $n+2$

（数学Ⅱ・数学B第3問は次ページに続く。）

次に，自然数 n に対して $S_n = \sum_{k=1}^{n} k\,|y_k|$ を求めよう。$r = \left|\dfrac{\boxed{\text{エオ}}}{\boxed{\text{カ}}}\right|$ とおくと

$$S_n - rS_n = \sum_{k=1}^{\boxed{\text{シ}}} r^{k-1} - nr^{\boxed{\text{ス}}} \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

であり，したがって

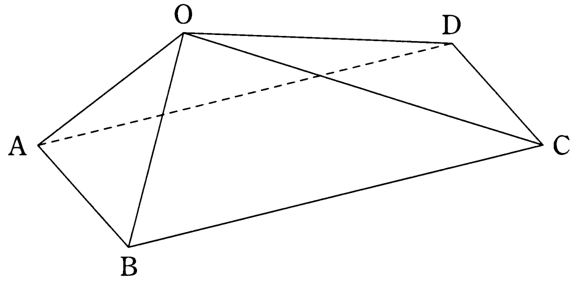
$$S_n = \frac{\boxed{\text{セソ}}}{\boxed{\text{タ}}}\left\{1 - \left(\frac{1}{\boxed{\text{チ}}}\right)^{\boxed{\text{ツ}}}\right\} - \frac{n}{\boxed{\text{テ}}}\left(\frac{1}{\boxed{\text{ト}}}\right)^{\boxed{\text{ナ}}}$$

となる。ただし，$\boxed{\text{シ}}$，$\boxed{\text{ス}}$，$\boxed{\text{ツ}}$，$\boxed{\text{ナ}}$ については，当てはまるものを，次の⓪～③のうちから一つずつ選べ。同じものを繰り返し選んでもよい。

⓪ $n - 1$　　① n　　② $n + 1$　　③ $n + 2$

第4問 （選択問題）（配点　20）

四角錐（すい）OABCD において，三角形 OBC と三角形 OAD は合同で，OB $= 1$，BC $= 2$，OC $= \sqrt{3}$ であり，底面の四角形 ABCD は長方形である。AB $= 2r$ とおき，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ とおく。



$\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表すと $\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \boxed{\text{ア}} - \boxed{\text{イ}} + \vec{c}$ である。辺 OD を $1:2$ に内分する点を L とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{AL}} = -\frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}\vec{a} - \frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{エ}}}\vec{b} + \frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{エ}}}\vec{c}$$

となる。

（数学Ⅱ・数学B第4問は次ページに続く。）

さらに辺OBの中点をM，3点A，L，Mの定める平面をαとし，平面αと辺OCとの交点をNとする。点Nは平面α上にあることから，$\overrightarrow{\mathrm{AN}}$は実数$s$，$t$を用いて$\overrightarrow{\mathrm{AN}} = s\,\overrightarrow{\mathrm{AL}} + t\,\overrightarrow{\mathrm{AM}}$と表されるので

$$\overrightarrow{\mathrm{ON}} = \left(\boxed{\text{キ}} - \frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}s - t\right)\vec{a} + \left(-\frac{s}{\boxed{\text{コ}}} + \frac{t}{\boxed{\text{サ}}}\right)\vec{b}$$
$$+ \frac{s}{\boxed{\text{シ}}}\vec{c}$$

となる。一方，点Nは辺OC上にもある。これらから，$\overrightarrow{\mathrm{ON}} = \dfrac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}\vec{c}$となる。

また，$\vec{a}\cdot\vec{b} = \boxed{\text{ソ}} - \boxed{\text{タ}}\,r^2$，$\vec{b}\cdot\vec{c} = \boxed{\text{チ}}$，$\vec{a}\cdot\vec{c} = \boxed{\text{ツテ}}\,r^2$である。よって，$\overrightarrow{\mathrm{AM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MN}}$を計算すると，$\mathrm{AB} = \sqrt{\boxed{\text{ト}}}$のとき，直線AMと直線MNは垂直になることがわかる。

第5問 （選択問題）（配点　20）

次の表は，3回行われた50点満点のゲームの得点をまとめたものである。1回戦のゲームに15人の選手が参加し，そのうち得点が上位の10人が2回戦のゲームに参加した。さらに，2回戦のゲームで得点が上位の4人が3回戦のゲームに参加した。表中の「—」は，そのゲームに参加しなかったことを表している。また，表中の「範囲」は，得点の最大の値から最小の値を引いた差である。なお，ゲームの得点は整数値をとるものとする。

番　号	1回戦（点）	2回戦（点）	3回戦（点）
1	33	37	—
2	44	44	D
3	30	34	—
4	38	35	—
5	29	30	—
6	26	—	—
7	43	41	43
8	23	—	—
9	28	—	—
10	34	38	E
11	33	33	—
12	26	—	—
13	36	41	F
14	30	37	—
15	27	—	—
平均値	A	37.0	43.0
範　囲	21	14	7
分　散	35.60	B	6.50
標準偏差	6.0	C	2.5

以下，小数の形で解答する場合，指定された桁(けた)数の一つ下の桁を四捨五入し，解答せよ。途中で割り切れた場合，指定された桁まで⓪にマークすること。

（数学Ⅱ・数学B第5問は次ページに続く。）

(1) 1回戦のゲームに参加した15人の得点の平均値Aは $\boxed{アイ}$.$\boxed{ウ}$ 点である。そのうち，得点が上位の10人の得点の平均値を A_1，得点が下位の5人の得点の平均値を A_2 とすると，A_1，A_2，Aの間には関係式

$$\frac{\boxed{エ}}{\boxed{オ}}A_1+\frac{\boxed{カ}}{\boxed{キ}}A_2=A$$

が成り立つ。ただし，$\dfrac{\boxed{エ}}{\boxed{オ}}+\dfrac{\boxed{カ}}{\boxed{キ}}=1$ とする。

(2) 2回戦のゲームに参加した10人の2回戦のゲームの得点について，平均値37.0点からの偏差の最大値は $\boxed{ク}$.$\boxed{ケ}$ 点である。また，分散Bの値は $\boxed{コサ}$.$\boxed{シス}$，標準偏差Cの値は $\boxed{セ}$.$\boxed{ソ}$ 点である。

(3) 3回戦のゲームの得点について，大小関係F＜E＜43＜Dが成り立っている。

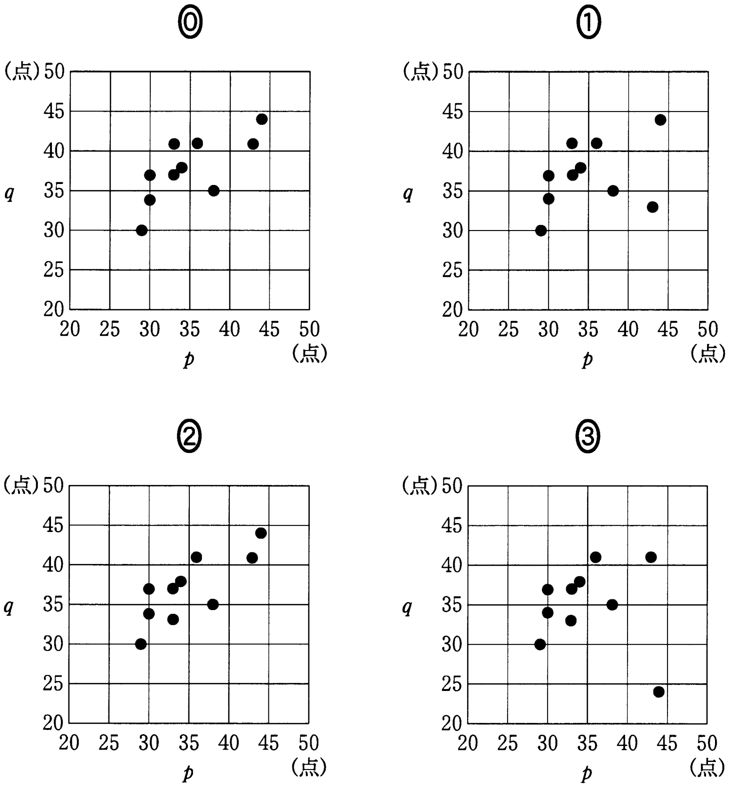
D，E，Fの値から平均値43.0点を引いた整数値を，それぞれx，y，zとおくと，3回戦のゲームの得点の平均値が43.0点，範囲が7点，分散が6.50であることから，次の式が成り立つ。

$$x+y+z=\boxed{タ}$$
$$x-z=\boxed{チ}$$
$$x^2+y^2+z^2=\boxed{ツテ}$$

上の連立方程式と条件 $z<y<0<x$ により x，y，z の値が求まり，D，E，Fの値が，それぞれ $\boxed{トナ}$ 点，$\boxed{ニヌ}$ 点，$\boxed{ネノ}$ 点であることがわかる。

（数学Ⅱ・数学B第5問は次ページに続く。）

(4) 2回戦のゲームに参加した10人について，1回戦のゲームの得点を変量 p，2回戦のゲームの得点を変量 q で表す。このとき，変量 p と変量 q の相関図(散布図)として適切なものは $\boxed{\text{ハ}}$ であり，変量 p と変量 q の間には $\boxed{\text{ヒ}}$。$\boxed{\text{ハ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ。



$\boxed{\text{ヒ}}$ に最も適当なものを，次の⓪～②のうちから一つ選べ。

⓪ 正の相関関係がある

① 相関関係はほとんどない

② 負の相関関係がある

(数学Ⅱ・数学B第5問は次ページに続く。)

(5) 2回戦のゲームに参加した10人について，(4)での変量p，qを使って，得点の変化率を表す新しい変量rを，$r = \dfrac{q-p}{p} \times 100(\%)$で定め，次の度数分布表を作成した。

階級(%) 以上　未満	人数(人)
-10 ～ 0	2
0 ～ 10	G
10 ～ 20	H
20 ～ 30	1

表中のGの値は $\boxed{フ}$，Hの値は $\boxed{ヘ}$ である。

第6問 (選択問題)(配点 20)

n を 2 以上の自然数とし，以下の操作を考える。

(i) n が偶数ならば，n を 2 で割る。

(ii) n が奇数ならば，n を 3 倍して 1 を加える。

与えられた 2 以上の自然数にこの操作を行い，得られた自然数が 1 でなければ，得られた自然数にこの操作を繰り返す。2 以上 10^5 以下の自然数から始めると，この操作を何回か繰り返すことで必ず 1 が得られることが確かめられている。たとえば，10 から始めると

$$10 \to 5 \to 16 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1$$

である。ただし，$a \to b$ は 1 回の操作で自然数 a から自然数 b が得られたことを意味する。

N を 2 以上 10^5 以下の自然数とするとき，$F(N)$ を N から始めて 1 が得られるまでの上記の操作の回数と定義する。また，$F(1) = 0$ とおく。たとえば，上の例から，$F(10) = 6$ である。

(1) $F(6) = \boxed{\text{ア}}$，$F(11) = \boxed{\text{イウ}}$ である。

(数学Ⅱ・数学B第6問は次ページに続く。)

(2) 10^5 以下の自然数 N について，$F(N)$ を求めるため，次のような〔プログラム〕を作った。ただし，INT(X) は X を超えない最大の整数を表す関数である。

〔プログラム〕

```
100 INPUT N
110 LET I=N
120 LET C=0
130 IF I=1 THEN GOTO [エ]
140 IF INT(I/2)*2=I THEN
150     [オ]
160     GOTO 190
170 END IF
180 LET I=3*I+1
190 [カ]
200 [キ]
210 PRINT "F(";N;")=";C
220 END
```

$\boxed{エ}$ に当てはまるものを，次の⓪～⑤のうちから一つ選べ。

⓪ 130　① 140　② 150　③ 190　④ 200　⑤ 210

$\boxed{オ}$，$\boxed{カ}$，$\boxed{キ}$ に当てはまるものを，次の⓪～⑧のうちからそれぞれ一つずつ選べ。

⓪ LET C=1	① GOTO 130	② GOTO 140
③ GOTO 210	④ LET C=C+1	⑤ LET I=I+1
⑥ LET I=I/2	⑦ NEXT N	⑧ LET I=2*I+1

〔プログラム〕を実行して，N に 24 を入力すると，180 行は $\boxed{ク}$ 回実行される。

(数学Ⅱ・数学B第6問は次ページに続く。)

(3) M を 10^5 以下の自然数とする。(2)で作成した〔プログラム〕を変更して，M 以下の自然数 N のうち，$F(N) \leqq 10$ となるすべての N について，$F(N)$ の値を出力するプログラムを作成する。そのために，まず，〔プログラム〕の 100 行を次の二つの行で置き換える。

```
100 INPUT M
101 FOR N=1 TO M
```

さらに，210 行を次の二つの行で置き換える。

```
210 IF [ ケ ] THEN PRINT "F(";N;")=";C
211 [ コ ]
```

(数学Ⅱ・数学B第6問は次ページに続く。)

$\boxed{\text{ケ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～⑤のうちから一つ選べ。

⓪ INT(I/2)=I　　① C>10　　② M>=C
③ N=I　　④ C<=10　　⑤ I=N

$\boxed{\text{コ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～⑤のうちから一つ選べ。

⓪ LET M=M+1　　① GOTO 120　　② NEXT M
③ NEXT N　　④ LET C=C+1　　⑤ NEXT I

変更後のプログラムを実行して，M に 10 を入力すると，210 行の PRINT 文は $\boxed{\text{サ}}$ 回実行される。