

数 学 II

(全問必答)

第1問 (配点 30)

[1] $a > 0$, $a \neq 1$ として, 不等式

$$2 \log_a(8-x) > \log_a(x-2) \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

を満たす x の値の範囲を求めよう。

真数は正であるから, $\boxed{\text{ア}} < x < \boxed{\text{イ}}$ が成り立つ。ただし, 対数 $\log_a b$ に対し, a を底といい, b を真数という。

底 a が $a < 1$ を満たすとき, 不等式 $\textcircled{1}$ は

$$x^2 - \boxed{\text{ウエ}} x + \boxed{\text{オカ}} \boxed{\text{キ}} 0 \quad \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

となる。ただし, $\boxed{\text{キ}}$ については, 当てはまるものを, 次の $\textcircled{0} \sim \textcircled{2}$ のうちから一つ選べ。

$\textcircled{0} <$

$\textcircled{1} =$

$\textcircled{2} >$

(数学II第1問は次ページに続く。)

数学Ⅱ

したがって、真数が正であることと②から、 $a < 1$ のとき、不等式①を満たす x のとり得る値の範囲は $\boxed{\text{ク}} < x < \boxed{\text{ケ}}$ である。

同様にして、 $a > 1$ のときには、不等式①を満たす x のとり得る値の範囲は $\boxed{\text{コ}} < x < \boxed{\text{サ}}$ であることがわかる。

(数学Ⅱ第1問は次ページに続く。)

数学Ⅱ

[2] $0 \leq \alpha \leq \pi$ として

$$\sin \alpha = \cos 2\beta$$

を満たす β について考えよう。ただし、 $0 \leq \beta \leq \pi$ とする。

たとえば、 $\alpha = \frac{\pi}{6}$ のとき、 β のとり得る値は $\frac{\pi}{\boxed{\text{シ}}}$ と $\frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{シ}}}\pi$ の

二つである。

このように、 α の各値に対して、 β のとり得る値は二つある。そのうちの小さい方を β_1 、大きい方を β_2 とし

$$y = \sin\left(\alpha + \frac{\beta_1}{2} + \frac{\beta_2}{3}\right)$$

が最大となる α の値とそのときの y の値を求めよう。

β_1, β_2 を α を用いて表すと、 $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$ のときは

$$\beta_1 = \frac{\pi}{\boxed{\text{セ}}} - \frac{\alpha}{\boxed{\text{ソ}}}, \quad \beta_2 = \frac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{セ}}}\pi + \frac{\alpha}{\boxed{\text{ソ}}}$$

となり、 $\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi$ のときは

$$\beta_1 = -\frac{\pi}{\boxed{\text{チ}}} + \frac{\alpha}{\boxed{\text{ツ}}}, \quad \beta_2 = \frac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{チ}}}\pi - \frac{\alpha}{\boxed{\text{ツ}}}$$

となる。

(数学Ⅱ第1問は次ページに続く。)

したがって、 $\alpha + \frac{\beta_1}{2} + \frac{\beta_2}{3}$ のとり得る値の範囲は

$$\frac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}}\pi \leq \alpha + \frac{\beta_1}{2} + \frac{\beta_2}{3} \leq \frac{\boxed{\text{ニ又}}}{\boxed{\text{ネ}}}\pi$$

である。よって、 y が最大となる α の値は $\frac{\boxed{\text{ノ}}}{\boxed{\text{ハヒ}}}\pi$ であり、そのときの

y の値は $\boxed{\text{フ}}$ であることがわかる。 $\boxed{\text{フ}}$ に当てはまるものを、次の
 ①～③のうちから一つ選べ。

① $\frac{1}{2}$

② 1

③ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

④ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

数学Ⅱ

第2問 (配点 30)

座標平面上で曲線 $y = x^3$ を C とし、放物線 $y = x^2 + px + q$ を D とする。

(1) 曲線 C 上の点 $P(a, a^3)$ における C の接線の方程式は

$$y = 3a \boxed{\text{ア}} x - \boxed{\text{イ}} a \boxed{\text{ウ}}$$

である。放物線 D は点 P を通り、 D の P における接線と、 C の P における接線が一致するとする。このとき、 p と q を a を用いて表すと

$$\begin{cases} p = 3a \boxed{\text{エ}} - \boxed{\text{オ}} a \\ q = \boxed{\text{カキ}} a^3 + a \boxed{\text{ク}} \end{cases} \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

となる。

以下、 p 、 q は $\textcircled{1}$ を満たすとする。

(数学Ⅱ第2問は次ページに続く。)

(2) 放物線 D が y 軸上の与えられた点 $Q(0, b)$ を通るとき

$$b = \boxed{\text{ケコ}} a^3 + a \boxed{\text{サ}} \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

が成り立つ。与えられた b に対して、 $\textcircled{2}$ を満たす a の値の個数を調べよう。

そのために、関数

$$f(x) = \boxed{\text{ケコ}} x^3 + x \boxed{\text{サ}}$$

の増減を調べる。関数 $f(x)$ は、 $x = \boxed{\text{シ}}$ で極小値 $\boxed{\text{ス}}$ をとり、

$$x = \frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}} \text{ で極大値 } \frac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チツ}}} \text{ をとる。}$$

関数 $y = f(x)$ のグラフをかくことにより、 $\boxed{\text{ス}} < b < \frac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チツ}}}$ のと

き、 $\textcircled{2}$ を満たす a の値の個数は $\boxed{\text{テ}}$ であることがわかる。

(3) 放物線 D の頂点が x 軸上にあるのは、 $a = \boxed{\text{ト}}$, $\frac{\boxed{\text{ナ}}}{\boxed{\text{ニ}}}$ の二つの場

合である。 $a = \boxed{\text{ト}}$ のときの放物線を D_1 , $a = \frac{\boxed{\text{ナ}}}{\boxed{\text{ニ}}}$ のときの放物線

を D_2 とする。 D_1 , D_2 と x 軸で囲まれた図形の面積は $\frac{2 \boxed{\text{ヌ}}}{3 \boxed{\text{ネノ}}}$ である。

数学Ⅱ

第3問 (配点 20)

O を原点とする座標平面上に2点 $A(1, a)$, $B(0, 2)$ をとる。三角形 OAB の重心を G, 直線 AG と辺 OB との交点を L とおく。L の座標は $(0, \boxed{\text{ア}})$ である。線分 OL 上に点 $P(0, t)$ をとり, 直線 PG と直線 AB との交点を Q とする。P が線分 OL 上を動くとき, 三角形 BPQ の面積 S の最小値を求めよう。

G の座標は $\left(\frac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}, \frac{\boxed{\text{エ}} + \boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{ウ}}}\right)$ であるから, PG の方程式は

$$y = \left(\boxed{\text{カ}} + \boxed{\text{キ}} - \boxed{\text{ク}}t\right)x + t$$

となる。ただし, $\boxed{\text{エ}}$ と $\boxed{\text{オ}}$ の解答の順序, および $\boxed{\text{カ}}$ と $\boxed{\text{キ}}$ の解答の順序は問わない。

また, AB の方程式は

$$y = \left(\boxed{\text{ケ}} - \boxed{\text{コ}}\right)x + \boxed{\text{サ}}$$

であるから, Q の x 座標は

$$\frac{\boxed{\text{シ}} - t}{\boxed{\text{ス}} - \boxed{\text{セ}}t}$$

である。

(数学Ⅱ第3問は次ページに続く。)

したがって、三角形BPQの面積 S を t を用いて表すと

$$S = \frac{(\boxed{\text{ソ}} - t)^2}{\boxed{\text{タ}} (\boxed{\text{ス}} - \boxed{\text{セ}} t)}$$

となる。ここで、式を簡単にするために、 $u = \boxed{\text{ス}} - \boxed{\text{セ}} t$ とおくと

$$S = \frac{1}{\boxed{\text{チツ}}} \left(u + \frac{\boxed{\text{テ}}}{u} + \boxed{\text{ト}} \right)$$

となる。

Pが線分OL上を動くとき、 u のとり得る値の範囲は $\boxed{\text{ナ}} \leq u \leq \boxed{\text{ニ}}$ である。相加平均と相乗平均の関係により

$$u + \frac{\boxed{\text{テ}}}{u} \geq \boxed{\text{ヌ}}$$

となり、等号は $u = \boxed{\text{ネ}}$ のときに成り立つ。したがって、 $u = \boxed{\text{ネ}}$ のと

き、 S は最小値 $\frac{\boxed{\text{ノ}}}{\boxed{\text{ハ}}}$ をとる。また、このときのPGの傾きは $\boxed{\text{ヒ}}$ であ

る。

数学Ⅱ

第4問 (配点 20)

a を実数とし、次数が3以下の整式 $P(x)$ は

$$P(1) = 0, \quad P(2) = a, \quad P(3) = 2, \quad P(4) = 6$$

を満たすとする。 $P(1) = 0$ であるので、因数定理から、 $P(x)$ は $x - \boxed{\text{ア}}$ で割り切れ、次数が2以下の整式 $Q(x)$ で

$$P(x) = (x - \boxed{\text{ア}})Q(x)$$

を満たすものがある。 $Q(x)$ を求めるために

$$Q(x) = r(x - 2)(x - 3) + s(x - 2) + t$$

とおいて、定数 r, s, t を a を用いて表してみよう。 $P(2) = a$ から $t = \boxed{\text{イ}}$ で

となり、次に、 $P(3) = 2$ から $s = \boxed{\text{ウエ}} + \boxed{\text{オ}}$ となる。さらに、 $P(4) = 6$

から $r = \frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}$ となる。したがって、 $Q(x)$ は

$$\frac{1}{\boxed{\text{キ}}} \left\{ \boxed{\text{カ}} x^2 + (\boxed{\text{クケ}} a + \boxed{\text{コ}}) x + \boxed{\text{サシ}} a - \boxed{\text{ス}} \right\}$$

である。

(数学Ⅱ第4問は次ページに続く。)

方程式 $P(x) = 0$ が虚数解をもつような a の値の範囲は

$$\boxed{\text{セ}} - \boxed{\text{ソ}} \sqrt{\boxed{\text{タ}}} < a < \boxed{\text{セ}} + \boxed{\text{ソ}} \sqrt{\boxed{\text{タ}}}$$

である。この範囲にある最小の整数は $\boxed{\text{チ}}$ である。 $a = \boxed{\text{チ}}$ のとき、

方程式 $P(x) = 0$ の虚数解は

$$\frac{\boxed{\text{ツ}} \pm \sqrt{\boxed{\text{テ}}} i}{\boxed{\text{ト}}}$$

である。

問題と解答は、独立行政法人 大学入試センターホームページより転載しています。
ただし、著作権上の都合により、一部の問題・画像を省略しています。

日本一の学校情報



<http://www.js88.com>

インターネット塾・予備校情報サイト



<http://jyuku.js88.com>