数　学　Ⅱ

（全　問　必　答）

第1問 （配点　30）

〔1〕　連立方程式

$$\begin{cases} \cos 2\alpha + \cos 2\beta = \dfrac{4}{15} & \cdots\cdots\cdots\cdots ① \\ \cos\alpha\cos\beta = -\dfrac{2\sqrt{15}}{15} & \cdots\cdots\cdots\cdots ② \end{cases}$$

を考える。ただし，$0 \leqq \alpha \leqq \pi$，$0 \leqq \beta \leqq \pi$ であり，$\alpha < \beta$ かつ

$$|\cos\alpha| \geqq |\cos\beta| \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

とする。このとき，$\cos\alpha$ と $\cos\beta$ の値を求めよう。

2倍角の公式を用いると，① から

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta = \dfrac{\boxed{アイ}}{\boxed{ウエ}}$$

が得られる。また，② から，$\cos^2\alpha\cos^2\beta = \dfrac{\boxed{オ}}{15}$ である。

（数学Ⅱ第1問は次ページに続く。）

したがって，条件 ③ を用いると

$$\cos^2\alpha = \frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}, \qquad \cos^2\beta = \frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$$

である。よって，② と条件 $0 \leqq \alpha \leqq \pi$，$0 \leqq \beta \leqq \pi$，$\alpha < \beta$ から

$$\cos\alpha = \frac{\boxed{\text{コ}}\sqrt{\boxed{\text{サ}}}}{\boxed{\text{シ}}}, \qquad \cos\beta = \frac{\boxed{\text{ス}}\sqrt{\boxed{\text{セ}}}}{\boxed{\text{ソ}}}$$

である。

（数学Ⅱ第１問は次ページに続く。）

〔2〕 座標平面上に点A$\left(0,\ \frac{3}{2}\right)$をとり，関数$y = \log_2 x$のグラフ上に2点B$(p,\ \log_2 p)$，C$(q,\ \log_2 q)$をとる。線分ABを1：2に内分する点がCであるとき，p，qの値を求めよう。

真数の条件により，$p >$ $\boxed{\text{タ}}$，$q >$ $\boxed{\text{タ}}$ である。ただし，対数$\log_a b$に対し，aを底といい，bを真数という。

線分ABを1：2に内分する点の座標は，pを用いて

$$\left(\frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}p,\quad \frac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}}\log_2 p + \boxed{\text{ナ}}\right)$$

と表される。これがCの座標と一致するので

$$\begin{cases} \dfrac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}p = q & \cdots\cdots\cdots\cdots ④ \\ \dfrac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}}\log_2 p + \boxed{\text{ナ}} = \log_2 q & \cdots\cdots\cdots\cdots ⑤ \end{cases}$$

が成り立つ。

（数学Ⅱ第1問は次ページに続く。）

⑤は

$$p = \frac{\boxed{ニ}}{\boxed{ヌ}} q^{\boxed{ネ}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑥$$

と変形できる。④と⑥を連立させた方程式を解いて，$p >$ $\boxed{タ}$，$q >$ $\boxed{タ}$ に注意すると

$$p = \boxed{ノ}\sqrt{\boxed{ハ}}, \quad q = \boxed{ヒ}\sqrt{\boxed{フ}}$$

である。

また，Cの y 座標 $\log_2\left(\boxed{ヒ}\sqrt{\boxed{フ}}\right)$ の値を，小数第2位を四捨五入して小数第1位まで求めると，$\boxed{ヘ}$ である。$\boxed{ヘ}$ に当てはまるものを，次の⓪～ⓑのうちから一つ選べ。ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$，$\log_{10} 7 = 0.8451$ とする。

⓪ 0.3　① 0.6　② 0.9　③ 1.3　④ 1.6　⑤ 1.9
⑥ 2.3　⑦ 2.6　⑧ 2.9　⑨ 3.3　ⓐ 3.6　ⓑ 3.9

数学Ⅱ

第２問　(配点　30)

Ｏを原点とする座標平面上の放物線 $y = x^2 + 1$ を C とし，点 $(a,\ 2a)$ をＰとする。

(1)　点Ｐを通り，放物線 C に接する直線の方程式を求めよう。

C 上の点 $(t,\ t^2 + 1)$ における接線の方程式は

$$y = \boxed{\text{ア}}\,tx - t^2 + \boxed{\text{イ}}$$

である。この直線がＰを通るとすると，t は方程式

$$t^2 - \boxed{\text{ウ}}\,at + \boxed{\text{エ}}\,a - \boxed{\text{オ}} = 0$$

を満たすから，$t = \boxed{\text{カ}}\,a - \boxed{\text{キ}}$，$\boxed{\text{ク}}$ である。よって，$a \neq \boxed{\text{ケ}}$ のとき，Ｐを通る C の接線は２本あり，それらの方程式は

$$y = \left(\boxed{\text{コ}}\,a - \boxed{\text{サ}}\right)x - \boxed{\text{シ}}\,a^2 + \boxed{\text{ス}}\,a \quad \cdots\cdots\cdots \text{①}$$

と

$$y = \boxed{\text{セ}}\,x$$

である。

(2)　(1)の方程式①で表される直線を ℓ とする。ℓ と y 軸との交点を $\mathrm{R}(0,\ r)$ とすると，$r = -\boxed{\text{シ}}\,a^2 + \boxed{\text{ス}}\,a$ である。$r > 0$ となるのは，$\boxed{\text{ソ}} < a < \boxed{\text{タ}}$ のときであり，このとき，三角形 OPR の面積 S は

$$S = \boxed{\text{チ}}\left(a^{\boxed{\text{ツ}}} - a^{\boxed{\text{テ}}}\right)$$

となる。

(数学Ⅱ第２問は次ページに続く。)

$\boxed{\text{ソ}} < a < \boxed{\text{タ}}$ のとき，S の増減を調べると，S は $a = \dfrac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}}$

で最大値 $\dfrac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌネ}}}$ をとることがわかる。

(3) $\boxed{\text{ソ}} < a < \boxed{\text{タ}}$ のとき，放物線 C と(2)の直線 ℓ および2直線 $x = 0$，$x = a$ で囲まれた図形の面積を T とすると

$$T = \frac{\boxed{\text{ノ}}}{\boxed{\text{ハ}}}a^3 - \boxed{\text{ヒ}}\,a^2 + \boxed{\text{フ}}$$

である。$\dfrac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}} \leqq a < \boxed{\text{タ}}$ の範囲において，T は $\boxed{\text{ヘ}}$。$\boxed{\text{ヘ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～⑤のうちから一つ選べ。

⓪ 減少する
① 極小値をとるが，極大値はとらない
② 増加する
③ 極大値をとるが，極小値はとらない
④ 一定である
⑤ 極小値と極大値の両方をとる

第3問 (配点 20)

座標平面上に2点A(0, 3), B(8, 9)をとる。

(1) 2点A, Bを通る直線の方程式は$y = \dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}x + \boxed{\text{ウ}}$である。

(2) 線分ABの長さは$\boxed{\text{エオ}}$である。

(3) 線分ABを直径とする円Cの方程式は

$$\left(x - \boxed{\text{カ}}\right)^2 + \left(y - \boxed{\text{キ}}\right)^2 = \boxed{\text{クケ}}$$

である。また，AにおけるCの接線の方程式は

$$y = \frac{\boxed{\text{コサ}}}{\boxed{\text{シ}}}x + \boxed{\text{ス}} \quad \cdots\cdots ①$$

である。

(数学Ⅱ第3問は次ページに続く。)

(4) 三角形ABPの面積が20である点Pの軌跡は，2直線

$$y = \frac{\boxed{セ}}{\boxed{ソ}}x + \boxed{タ} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

と

$$y = \frac{\boxed{セ}}{\boxed{ソ}}x - \boxed{チ}$$

である。

(5) 直線①と直線②の交点の x 座標は $\frac{\boxed{ツテト}}{\boxed{ナ}}$ であり，円 C と直線②の交点の x 座標は $\boxed{ニ}$ と $\frac{\boxed{ヌネ}}{\boxed{ノ}}$ である。

(6) 三角形ABPの面積が20であり，かつ三角形ABPが直角三角形であるような点Pは全部で $\boxed{ハ}$ 個ある。

第4問 （配点　20）

(1)　4次式$P(x)$は，x^4の係数が1で，x^2-2x+3で割り切れるとする。また，$P(x)$は$P(1)=12$，$P(2)=15$を満たすとする。

$P(x)$をx^2-2x+3で割った商を$S(x)=x^2+mx+n$　(m，nは実数)とおくと，$S(1)=\boxed{\text{ア}}$，$S(2)=\boxed{\text{イ}}$であるから，$m=\boxed{\text{ウエ}}$，$n=\boxed{\text{オ}}$である。方程式$S(x)=0$の解は

$$\boxed{\text{カ}}\pm\sqrt{\boxed{\text{キ}}}\,i$$

である。

（数学Ⅱ第4問は次ページに続く。）

(2) 2次式 $Q(x) = x^2 + kx + \ell$(k, ℓ は実数)を考える。c を正の実数として,

$\alpha = c + \dfrac{1}{c}i$ とする。方程式 $Q(x) = 0$ は複素数 α を解にもつとする。

$Q(x)$ の x に α を代入すると

$$Q(\alpha) = \frac{\boxed{\text{クケ}}}{c^2} + c^2 + \boxed{\text{コ}}k + \ell + \left(\boxed{\text{サ}} + \frac{k}{c}\right)i$$

となる。k, ℓ を c を用いて表すと,$k = \boxed{\text{シスセ}}$, $\ell = \dfrac{c^{\boxed{\text{ソ}}} + \boxed{\text{タ}}}{c^2}$ である。

二項定理から,α の4乗は $\alpha^4 = \boxed{\text{チ}} + \boxed{\text{ツ}}i$ となる。$\boxed{\text{チ}}$, $\boxed{\text{ツ}}$ に当てはまるものを,次の⓪~ⓑのうちから一つずつ選べ。ただし,同じものを選んでもよい。

⓪ $3\left(c^2 + \dfrac{1}{c^2}\right)$　① $4\left(c^2 + \dfrac{1}{c^2}\right)$　② $6\left(c^2 + \dfrac{1}{c^2}\right)$

③ $3\left(c^2 - \dfrac{1}{c^2}\right)$　④ $4\left(c^2 - \dfrac{1}{c^2}\right)$　⑤ $6\left(c^2 - \dfrac{1}{c^2}\right)$

⑥ $\left(c^4 + \dfrac{1}{c^4} + 4\right)$　⑦ $\left(c^4 + \dfrac{1}{c^4} + 6\right)$　⑧ $\left(c^4 + \dfrac{1}{c^4} + 10\right)$

⑨ $\left(c^4 + \dfrac{1}{c^4} - 4\right)$　ⓐ $\left(c^4 + \dfrac{1}{c^4} - 6\right)$　ⓑ $\left(c^4 + \dfrac{1}{c^4} - 10\right)$

相加平均と相乗平均の関係から,c が $c > 0$ の範囲を動くとき,α^4 の実部 $\boxed{\text{チ}}$ は $c = \boxed{\text{テ}}$ で最小値 $\boxed{\text{トナ}}$ をとり,そのとき,$k = \boxed{\text{ニヌ}}$, $\ell = \boxed{\text{ネ}}$ である。