

数 学 II

(全 問 必 答)

第 1 問 (配点 30)

[1]

(1) 1 ラジアンとは、 $\boxed{\text{ア}}$ のことである。 $\boxed{\text{ア}}$ に当てはまるものを、次の①～③のうちから一つ選べ。

- ① 半径が 1，面積が 1 の扇形の中心角の大きさ
- ② 半径が π ，面積が 1 の扇形の中心角の大きさ
- ③ 半径が 1，弧の長さが 1 の扇形の中心角の大きさ
- ④ 半径が π ，弧の長さが 1 の扇形の中心角の大きさ

(2) 144° を弧度で表すと $\frac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}\pi$ ラジアンである。また、 $\frac{23}{12}\pi$ ラジアンを度で表すと $\boxed{\text{エオカ}}^\circ$ である。

(数学 II 第 1 問は次ページに続く。)

(3) $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$ の範囲で

$$2 \sin\left(\theta + \frac{\pi}{5}\right) - 2 \cos\left(\theta + \frac{\pi}{30}\right) = 1 \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

を満たす θ の値を求めよう。

$x = \theta + \frac{\pi}{5}$ とおくと、 $\textcircled{1}$ は

$$2 \sin x - 2 \cos\left(x - \frac{\pi}{\boxed{\text{キ}}}\right) = 1$$

と表せる。加法定理を用いると、この式は

$$\sin x - \sqrt{\boxed{\text{ク}}}\cos x = 1$$

となる。さらに、三角関数の合成を用いると

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{\boxed{\text{ケ}}}\right) = \frac{1}{\boxed{\text{コ}}}$$

と変形できる。 $x = \theta + \frac{\pi}{5}$, $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$ だから、 $\theta = \frac{\boxed{\text{サシ}}}{\boxed{\text{スセ}}}\pi$ であ

る。

(数学Ⅱ第1問は次ページに続く。)

数学Ⅱ

〔2〕 c を正の定数として、不等式

$$x^{\log_3 x} \geq \left(\frac{x}{c}\right)^3 \dots\dots\dots ②$$

を考える。

3 を底とする ② の両辺の対数を取り、 $t = \log_3 x$ とおくと

$$t \boxed{\text{ソ}} - \boxed{\text{タ}} t + \boxed{\text{タ}} \log_3 c \geq 0 \dots\dots\dots ③$$

となる。ただし、対数 $\log_a b$ に対し、 a を底といい、 b を真数という。

$c = \sqrt[3]{9}$ のとき、② を満たす x の値の範囲を求めよう。③ により

$$t \leq \boxed{\text{チ}}, \quad t \geq \boxed{\text{ツ}}$$

である。さらに、真数の条件を考えて

$$\boxed{\text{テ}} < x \leq \boxed{\text{ト}}, \quad x \geq \boxed{\text{ナ}}$$

となる。

(数学Ⅱ 第1問は次ページに続く。)

数学Ⅱ

第2問 (配点 30)

[1] $p > 0$ とする。座標平面上の放物線 $y = px^2 + qx + r$ を C とし、直線 $y = 2x - 1$ を l とする。 C は点 $A(1, 1)$ において l と接しているとする。

(1) q と r を、 p を用いて表そう。放物線 C 上の点 A における接線 l の傾きは $\boxed{\text{ア}}$ であることから、 $q = \boxed{\text{イウ}}p + \boxed{\text{エ}}$ がわかる。さらに、 C は点 A を通ることから、 $r = p - \boxed{\text{オ}}$ となる。

(2) $v > 1$ とする。放物線 C と直線 l および直線 $x = v$ で囲まれた図形の面積 S は $S = \frac{p}{\boxed{\text{カ}}} \left(v^3 - \boxed{\text{キ}}v^2 + \boxed{\text{ク}}v - \boxed{\text{ケ}} \right)$ である。

また、 x 軸と l および 2 直線 $x = 1$, $x = v$ で囲まれた図形の面積 T は、 $T = v \boxed{\text{コ}} - v$ である。

$U = S - T$ は $v = 2$ で極値をとるとする。このとき、 $p = \boxed{\text{サ}}$ であり、 $v > 1$ の範囲で $U = 0$ となる v の値を v_0 とすると、

$v_0 = \frac{\boxed{\text{シ}} + \sqrt{\boxed{\text{ス}}}}{\boxed{\text{セ}}}$ である。 $1 < v < v_0$ の範囲で U は $\boxed{\text{ソ}}$ 。

$\boxed{\text{ソ}}$ に当てはまるものを、次の①～④のうちから一つ選べ。

- ① つねに増加する ② つねに減少する ③ 正の値のみをとる
④ 負の値のみをとる ⑤ 正と負のどちらの値もとる

$p = \boxed{\text{サ}}$ のとき、 $v > 1$ における U の最小値は $\boxed{\text{タチ}}$ である。

(数学Ⅱ第2問は次ページに続く。)

数学Ⅱ

[2] 関数 $f(x)$ は $x \geq 1$ の範囲でつねに $f(x) \leq 0$ を満たすとする。 $t > 1$ のとき、曲線 $y = f(x)$ と x 軸および 2 直線 $x = 1$ 、 $x = t$ で囲まれた図形の面積を W とする。 t が $t > 1$ の範囲を動くとき、 W は、底辺の長さが $2t^2 - 2$ 、他の 2 辺の長さがそれぞれ $t^2 + 1$ の二等辺三角形の面積とつねに等しいとする。このとき、 $x > 1$ における $f(x)$ を求めよう。

$F(x)$ を $f(x)$ の不定積分とする。一般に、 $F'(x) = \boxed{\text{ツ}}$ 、 $W = \boxed{\text{テ}}$ が成り立つ。 $\boxed{\text{ツ}}$ 、 $\boxed{\text{テ}}$ に当てはまるものを、次の ①～⑧のうちから一つずつ選べ。ただし、同じものを選んでよい。

- | | | |
|-----------------|------------------|------------------|
| ① $-F(t)$ | ④ $F(t)$ | ⑦ $F(t) - F(1)$ |
| ③ $F(t) + F(1)$ | ⑥ $-F(t) + F(1)$ | ⑧ $-F(t) - F(1)$ |
| ② $-f(x)$ | ⑤ $f(x)$ | ⑨ $f(x) - f(1)$ |

したがって、 $t > 1$ において

$$f(t) = \boxed{\text{トナ}} t^{\boxed{\text{ニ}}} + \boxed{\text{ヌ}}$$

である。よって、 $x > 1$ における $f(x)$ がわかる。

数学Ⅱ

第3問 (配点 20)

座標平面上の2点 $A(-1, 0)$, $B(2, 1)$ を通る直線を l_1 とする。また、方程式 $x^2 + y^2 + 6x - 12y + 36 = 0$ が表す円を C_1 とする。

(1) l_1 の方程式は $x - \boxed{\text{ア}}y + \boxed{\text{イ}} = 0$ である。また、 C_1 の中心は $(\boxed{\text{ウエ}}, \boxed{\text{オ}})$ で、半径は $\boxed{\text{カ}}$ である。

(2) C_1 上の点 $P(a, b)$ に対して、三角形 ABP の重心 G の座標を (s, t) とおくと、 $a = \boxed{\text{キ}}s - \boxed{\text{ク}}$, $b = \boxed{\text{ケ}}t - \boxed{\text{コ}}$ である。したがって、 P が C_1 上を動くとき、 G の軌跡は中心 $(\frac{\boxed{\text{サシ}}}{\boxed{\text{ス}}}, \frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}})$ 、半径

$\boxed{\text{タ}}$ の円となる。

(数学Ⅱ第3問は次ページに続く。)

数学 II

- (3) (2)で求めた円を C_2 とする。点 Q が C_2 上を動き、点 R が線分 AB 上を動くとき、線分 QR の長さの最小値と最大値を求めよう。

C_2 の中心を通り、直線 l_1 と垂直な直線 l_2 の方程式は

$$\boxed{\text{チ}}x + \boxed{\text{ツ}}y - 1 = 0$$

である。 l_1 と l_2 の交点は、線分 AB を $1 : \boxed{\text{テ}}$ に内分することがわかる。よって、 l_2 は線分 AB と交わるので、 QR の長さの最小値は

$$\frac{\boxed{\text{ト}}\sqrt{\boxed{\text{ナニ}}}}{\boxed{\text{ヌ}}} - \boxed{\text{タ}}$$

である。

QR の長さが最大となるときの R の座標は $(\boxed{\text{ネ}}, \boxed{\text{ノ}})$ である。したがって、最大値は

$$\frac{\boxed{\text{ハ}}\sqrt{\boxed{\text{ヒ}}}}{\boxed{\text{フ}}} + \boxed{\text{タ}}$$

である。

数学Ⅱ

第4問 (配点 20)

a, b, c を実数とし、 x の整式 $P(x)$ を

$$P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

とする。3次方程式 $P(x) = 0$ は虚数 $-1 + \sqrt{6}i$ を解にもつとする。

- (1) 3次方程式 $P(x) = 0$ の実数解を a を用いて表そう。

$P(x)$ の x に虚数 $-1 + \sqrt{6}i$ を代入し、整理すると

$$P(-1 + \sqrt{6}i) = \boxed{\text{アイ}} a - b + c + \boxed{\text{ウエ}} \\ + \left(\boxed{\text{オカ}} a + b - \boxed{\text{キ}} \right) \sqrt{6}i$$

となる。したがって、 b, c を a を用いて表すと

$$b = \boxed{\text{ク}} a + \boxed{\text{ケ}}, \quad c = \boxed{\text{コ}} a - \boxed{\text{サシ}}$$

となる。

二つの虚数 $-1 + \sqrt{6}i, -1 - \sqrt{6}i$ を解とする2次方程式で、 x^2 の係数が1のものは

$$x^2 + \boxed{\text{ス}} x + \boxed{\text{セ}} = 0$$

である。 $P(x)$ をこの方程式の左辺の整式で割ると、商は $x + a - \boxed{\text{ソ}}$,

余りは $\boxed{\text{タ}}$ である。よって、方程式 $P(x) = 0$ の実数解は

$$x = \boxed{\text{チ}} a + \boxed{\text{ツ}}$$

と表せる。

(数学Ⅱ第4問は次ページに続く。)

(2) $P(x)$ を $x + a - 3$ で割ったときの余りが6のとき、 $a = \boxed{\text{テ}}$ である。

このとき、 $P(x)$ を2次の整式 $Q(x)$ で割ったときの商は $x - 1$ 、余りは $13x + 17$ とすると

$$Q(x) = x^2 + \boxed{\text{ト}}x + \boxed{\text{ナ}}$$

である。

問題と解答は、独立行政法人 大学入試センターホームページより転載しています。
ただし、著作権上の都合により、一部の問題・画像を省略しています。